第40卷 第5期
2023年10月
应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics
Vol. 40 No. 5
Oct. 2023

文章编号:1000-4939(2023)05-1043-07

新型准零刚度隔振器设计及动力学研究

杨远汉,黄龙,曾鹏,刘北

(长沙理工大学汽车与机械工程学院,410114 长沙)

摘 要:针对传统被动隔振器低频隔振性能不足的问题,提出了一种连杆-倾斜弹簧负刚度机构,并将其与线性弹簧并联构成一种新型准零刚度(quasi-zero stiffness,QZS)隔振器。首先,对该隔振器进行静力学分析,建立无量纲力-位移和无量纲刚度-位移关系式,并讨论设计参数对隔振器刚度的影响,进一步得出隔振器在平衡位置处具有零刚度特性的参数条件;其次,通过动力学研究,建立隔振器在位移激励下的非线性动力学方程,并应用谐波平衡法推导出位移传递率;最后,采用四阶龙格库塔法对准零刚度隔振器在不同激励频率下进行数值仿真,并与不含负刚度机构的线性隔振器进行对比分析。结果表明,准零刚度隔振器在低频激励下的隔振效果明显优于线性隔振器,而在高频激励下具备与线性隔振器相当的隔振性能。

关键词:负刚度机构;准零刚度;低频隔振;四阶龙格库塔法;位移传递率

中图分类号:TU112.59 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.05.009

Design and dynamic research of a new quasi-zero stiffness vibration isolator

YANG Yuanhan,HUANG Long,ZENG Peng,LIU Bei

(School of Automotive and Mechanical Engineering,Changsha University of Science and Technology,410114 Changsha,China)

Abstract:To improve low frequency vibration isolation performance of traditional passive vibration isolators,a negative stiffness mechanism containing links and inclined spring is proposed which and applied to a novel quasi-zero stiffness (QZS) vibration isolator by parallel connection with a linear spring. First, through the study of static characteristics,the relationship between the dimensionless force displacement and the dimensionless stiffness displacement of the vibration isolator is established. Besides,the effect of the geometric parameters on the stiffness is discussed and the parameter conditions in that the vibration isolator have zero stiffness are derived at the equilibrium position. Then,the nonlinear dynamic equation under displacement excitation is established by the dynamic characteristics,and the transfer rate is derived by the harmonic balance method. Finally,the vibration isolator is numerically simulated by the fourth-order Runge Kutta method, which is compared with the linear vibration isolator without negative stiffness mechanism. And the results show that the vibration isolator effect of the vibration isolator is obviously

收稿日期:2022-04-26 **修回日期**:2022-09-17
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No.51805047)
通信作者:黄龙。E-mail:huanglongin@foxmail.com
引用格式:杨远汉,黄龙,曾鹏,等.新型准零刚度隔振器设计及动力学研究[J].应用力学学报,2023,40(5):1043-1049.
YANG Yuanhan,HUANG Long,ZENG Peng,et al. Design and dynamic research of a new quasi-zero stiffness vibration isolator[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(5):1043-1049.

better than the linear vibration isolator under low-frequency excitation, and is equivalent to that of linear vibration isolator under the high-frequency excitation.

Key words: negative stiffness mechanism; quasi-zero stiffness; low-frequency vibration; fourth-order Runge Kutta method; displacement transfer rate

随着精密工程、测量技术等领域的迅速发展,对超低频隔振技术提出的要求愈来愈严格[1]。然而传统的被动隔振器作为解决工程振动问题的首选的方案,在隔离低频和超低频振动时很难起到较好的隔振效果[2]。由经典振动理论[3]可知,传统的被动隔振器对外部干扰频率大于隔振器固有频率 $\sqrt{2}$ 倍时起隔振作用,对于中、高频振动具有良好的隔振性能。

近年来,国内外学者针对低频隔振问题,提出了构型各异的 QZS(quasi-zero stiffness)隔振器,大多采用正、负刚度机构并联的组合方式。文献[4]提出了仅由 3 根弹簧组成的 QZS 隔振器,研究了该隔振器在平衡位置处的隔振性能。文献[5]利用水平弹簧与垂直弹簧并联获得 QZS 特性,并应用于车辆座椅的隔振。文献[6]提出了一种含有连杆负刚度机构的非线性隔振器,具有较高的静态承载能力。文献[7]利用负刚度机构与线性弹簧并联降低了隔振器的共振峰值。文献[8-9]通过并联具有负刚度特性的滑动梁与正刚度的线性弹簧,得到全新型的超低频隔振器,还将欧拉屈曲梁负刚度机构与线性隔振器并联得到 QZS 隔振器。文献[10]提出了一种含有蝶形弹簧负刚度的 QZS 隔振器。文献[11-12]提出了一种含有凸轮-滚柱负刚度机构的隔振器,具有良好的低频隔振性能。文献[13]研究了柔性基础 QZS 隔振器的动力学特性,验证了该隔振器具有优越的低频隔振性能。文献[14-15]提出了一种以拉簧作为负刚度机构的 QZS 隔振器,该隔振器适用于康复机器人低频隔振。文献[16]提出了一种含有凸轮-滚轮-非线性弹簧负刚度机构的 QZS 隔振器,并分析了该隔振器的力传递率。文献[17]提出了一种含有菱形构件的 QZS 隔振器,并研究了几何参数对阻尼和刚度的影响。

然而,现有的 QZS 隔振器大多结构复杂,成本较高,精度要求较高。对设计参数与系统刚度的关系以及在不同激励下隔振效果的研究还不够。为此,本研究提出一种结构简单、紧凑的 QZS 隔振器。通过静力学分析,详细讨论了设计参数对隔振系统刚度的影响。通过谐波平衡法推导出在简谐位移激励下的位移传递率。最后,通过数值仿真分析了隔振器在不同激励下的隔振效果。

1 QZS 隔振器

1.1 隔振器设计与受力分析

本研究提出一种正负刚度机构并联的新型 QZS 隔振器,如图 1 所示。其中,刚度为 K_v 的线性弹簧用于承载。负刚度机构主要由连杆和倾斜弹簧组成,用于抵消线性弹簧提供的正刚度。图 2 为三维模型简化的结构示意图。其中:F 为承载平台受到的外力;x 为承载平台在初始位置竖直向下的位移;l 为连杆的长度;h_0 为初始高度;θ 和 φ 分别为连杆与水平面的夹角以及倾斜弹簧与水平面的夹角;l_0 为 l 在水平方向的投影值;a 为 $\overline{AB}$ 的一半。

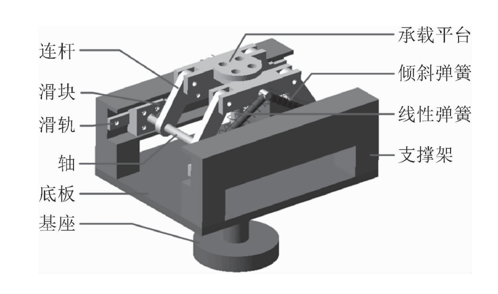


图 1 QZS 隔振器模型图

Fig. 1 Diagram of QZS vibration isolator model

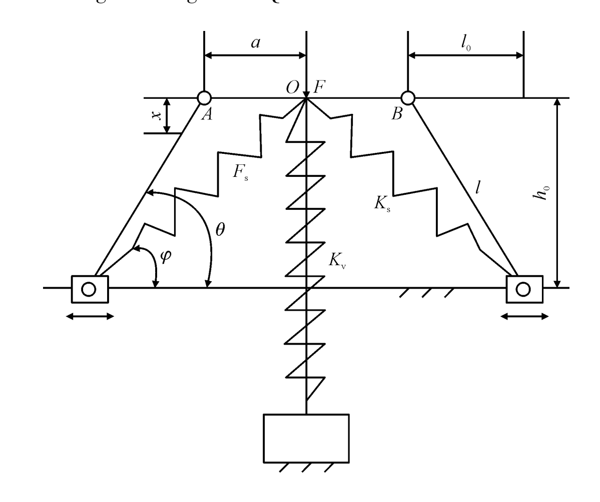


图 2 QZS 隔振器结构示意图

Fig. 2 Schematic diagram of QZS vibration isolator structure

1.2　负刚度机构

由于 QZS 隔振器中连杆-倾斜弹簧负刚度机构两侧完全对称，取该机构的一侧进行受力分析（不考虑线性弹簧），如图 2 所示。根据力平衡条件可知，外力 f 与斜簧作用力 F_S 的关系为

$$f = 4F_S(\cos\varphi\tan\theta - \sin\varphi) \tag{1}$$

其中，$F_S = K_S\lambda$，K_S 为斜簧刚度，λ 为斜簧变形量。结合几何运动分析可得，外力 f 与位移 x 的关系为

$$f = 4K_S a\frac{h_0 - x}{\sqrt{l^2 - (h_0 - x)^2}}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \tag{2}$$

其中，$\lambda_1 = \sqrt{(h_0 - x)^2 + (\sqrt{l^2 - (h_0 - x)^2} + a)^2}$，$\lambda_2 = \sqrt{(l_0 + a)^2 + h_0^2}$，$h_0 = \sqrt{l^2 - l_0^2}$。

将式（2）无量纲化可得无量纲力 $\hat{f}$ 表达式为

$$\hat{f} = \frac{4n(\hat{h} - \hat{x})}{\sqrt{m^2 - (\hat{h} - \hat{x})^2}}\left(1 - \frac{\sqrt{(1+n)^2 + (m^2 - 1)}}{\sqrt{(\hat{h} - \hat{x})^2 + (\sqrt{m^2 - (\hat{h} - \hat{x})^2} + n)^2}}\right) \tag{3}$$

其中，$\hat{f} = f/K_S l_0$，$n = a/l_0$，$m = l/l_0$，$\hat{x} = x/l_0$，$\hat{h} = \sqrt{m^2 - 1}$。

机构在不同 m 值下的无量纲力-位移曲线如图 3 所示，其中 $n = 1.6$。由图可知，当 $m = 1$ 时，无量纲力随着无量纲位移的增大而增大，该机构存在正刚度特性；当 $m > 1$ 时，无量纲力随无量纲位移的增大而减小，该机构存在负刚度特性。而机构在不同 n 值下的无量纲力-位移曲线如图 4 所示，其中 $m = 2$。随着 n 的逐渐增大，负刚度特性越显著。

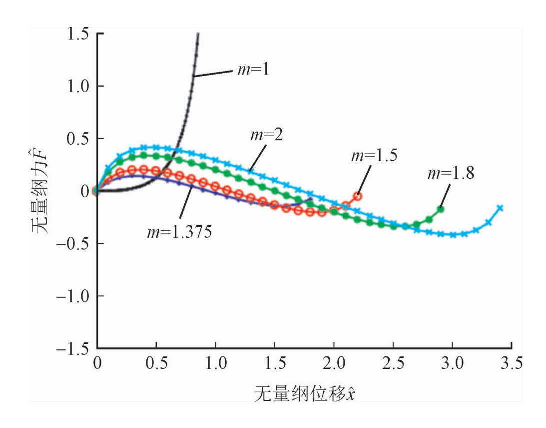


图 3　无量纲力-位移曲线（m 取不同值）

Fig. 3　Dimensionless force-displacement curve (m for different values)

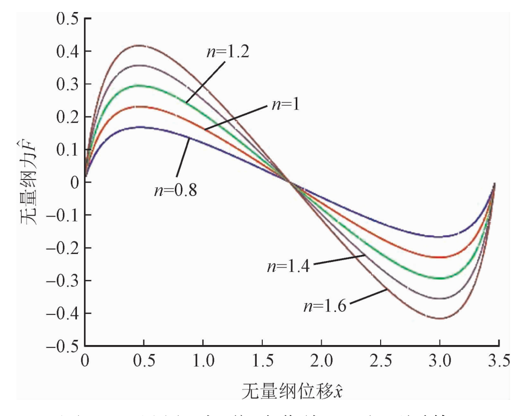


图 4　无量纲力-位移曲线（n 取不同值）

Fig. 4　Dimensionless force-displacement curve (n for different values)

2　静力学分析

为进一步分析 QZS 隔振器的刚度特性，令 $\alpha = K_S/K_v$ 为刚度比，结合式（2）可得，该隔振器的力-位移关系式为

$$F = K_v x + 4K_S a\frac{\sqrt{l^2 - l_0^2} - x}{\sqrt{l^2 - (\sqrt{l^2 - l_0^2} - x)^2}}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \tag{4}$$

将式（4）无量纲化可得无量纲力 $\hat{F}$ 为

$$\hat{F} = \hat{u} + \hat{h} + 4\alpha n\frac{\hat{u}^2}{\sqrt{m^2 - \hat{u}^2}}(\eta - 1) \tag{5}$$

其中，$\hat{F} = F/K_v l_0$，$\eta = \dfrac{\sqrt{(1+n)^2 + (m^2 - 1)}}{\sqrt{\hat{u}^2 + (m^2 - \hat{u}^2 + n)^2}}$，$\hat{u} = \hat{x} - \hat{h}$。

将式（5）对 $\hat{u}$ 求导，可得无量纲刚度 $\hat{K}$ 为

$$\hat{K} = 1 + 4\alpha n\left[\frac{m^2}{(m^2 - \hat{u}^2)^{\frac{3}{2}}}(\eta - 1) + \frac{\hat{u}^2 n\sqrt{(1+n)^2 + (m^2 - 1)}}{(m^2 - \hat{u}^2)[\hat{u}^2 + (\sqrt{m^2 - \hat{u}^2} + n)^2]^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{6}$$

在不同 m 值下，隔振器的刚度特性曲线如图 5（a）所示，其中 $\alpha = 3$，$n = 1.6$。在不同 n 值下，隔振器的刚度特性曲线如图 5（b）所示，其中 $\alpha = 3$，$m = 2$。在不同 α 值下，隔振器的刚度特性曲线如图5（c）所示，其中 $m = 2$，$n = 1.6$。当倾斜弹簧被拉伸至水平位置，即 $\hat{u} = 0$ 时，无量纲刚度存在最小值，且刚度特性曲线关于 $\hat{u} = 0$ 对称。无量纲刚度的最小值

与参数 m、n 以及刚度比 α 有关,且均随着 m、n、α 不断增大而逐渐减小,由正值变成负值。因此,可通过控制 m、n 与 α 的大小使刚度发生变化,以实现隔振器的 QZS 特性。

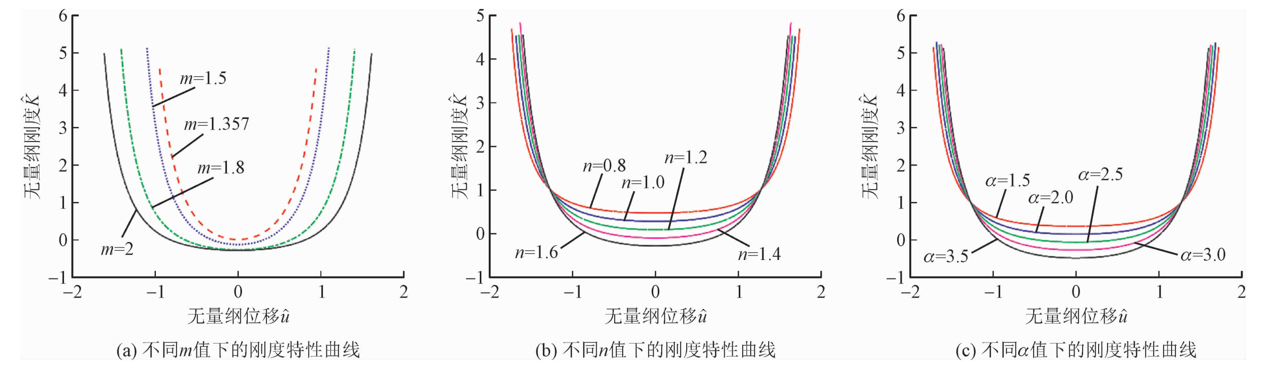


图5 QZS隔振器刚度特性曲线

Fig. 5 Stiffness curves of the QZS vibration isolator

由式(6)可得,隔振器在平衡位置 $\hat{u}=0$ 处的无量纲刚度 $\hat{K}(0)$ 为

$$\hat{K}(0)=1+4\alpha n\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\sqrt{(1+n)^2+(m^2-1)}}{m+n}-1\right)\right] \tag{7}$$

假如隔振器在平衡位置处的无量刚度 $\hat{K}=0$,则满足 QZS 特性的前提条件为

$$\alpha=\frac{m(m+n)}{4n\left[m+n-\sqrt{(1+n)^2+(m^2-1)}\right]} \tag{8}$$

图6为 QZS 隔振器无量纲力-位移曲线。令 $\chi=\frac{m(m+n)}{4n\left[m+n-\sqrt{(1+n)^2+(m^2-1)}\right]}$,根据图6可知,当 $\alpha=\chi$ 时,隔振器在静平衡位置处附近可实现准零刚度特性。当 $\alpha=0.8\chi$ 时,隔振器在平衡位置处附近表现出正刚度。当 $\alpha=1.2\chi$ 时,隔振器在平衡位置处附近表现出负刚度。因此,为了获得更宽的隔振频域,有必要确保平衡位置处附近的动刚度足够小。

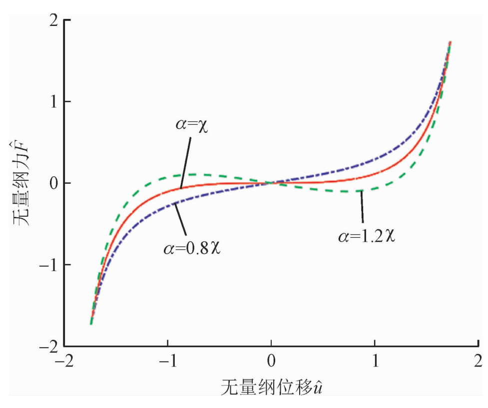


图6 无量纲力-位移曲线

Fig. 6 Dimensionless force-displacement curve

由式(8)可知,不同 m、n 值下刚度比 α 曲线,如图7所示。随着 m、n 的值不断增大,则仅需更小的刚度比 α 便可使隔振器在平衡位置处保持 QZS 特性。

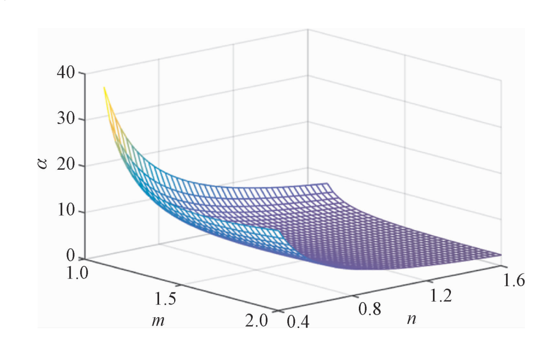


图7 不同 m、n 值下刚度比曲线

Fig. 7 Stiffness curves under different m and n values

3 动力学特性研究

3.1 力和刚度的简化替换

由图6可知,隔振器的无量纲力与无量纲位移近似为三次立方的关系。为便于分析隔振器的动力学特性,将无量纲力 $\hat{F}$ 在平衡位置 $\hat{u}=0$ 处进行三阶泰勒展开,则无量纲力-位移近似表达式为

$$\hat{F}_{\mathrm{app}}=\hat{F}(0)+\hat{K}(0)\hat{u}+\frac{\hat{K}'(0)}{2!}\hat{u}^2+\frac{\hat{K}''(0)}{3!}\hat{u}^3 \tag{9}$$

令 $\gamma_1=\hat{K}(0)$,$\gamma_2=\hat{K}''(0)/6$,则无量纲刚度-位移近似表达式为

$$\hat{K}_{\mathrm{app}}=\gamma_1+3\gamma_2\hat{u}^2 \tag{10}$$

将式(10)所确定的无量纲刚度-位移精确表达

式与近似表达式比较，如图 8 所示。在平衡位置附近，两者之间的误差很小，但随着无量纲位移绝对值的不断增大，近似刚度和精确刚度之间的误差也逐渐增大。

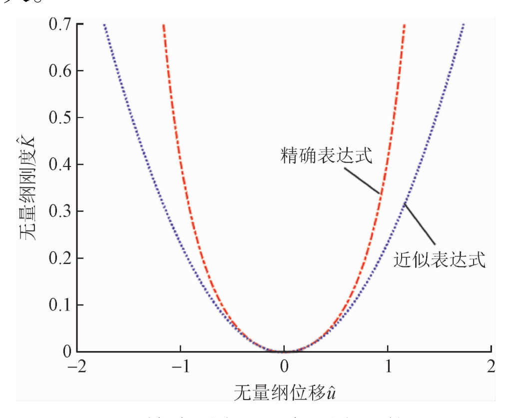


图 8　精确刚度和近似刚度比较图

Fig. 8　Comparison diagram of exact stiffness and approximate stiffness

若通过相对误差 δ 来测量近似刚度和精确刚度之间的误差，则 δ 的表达式为

$$\delta = \left| 1 - \frac{\hat{K}_{\text{app}}}{\hat{K}} \right| \times 100\% \tag{11}$$

近似刚度和精确刚度的相对误差曲线如图 9 所示，无量纲位移绝对值在 0.14 范围内时，相对误差不超过 1%。因此，在平衡位置附近，近似表达式与精确表达式相互替换是可行的。

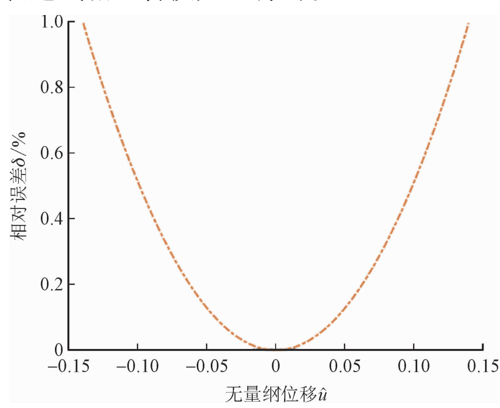


图 9　近似刚度和精确刚度的相对误差

Fig. 9　Relative error between approximate stiffness and exact stiffness

3.2　动力学建模

为确保质量为 M 的隔振设备放置在承载平台上时，倾斜弹簧和连杆刚好被压缩至水平位置，即处于静平衡位置，M 须满足的条件为

$$Mg = K_v h_0 \tag{12}$$

在简谐位移激励 $y = Z\sin(\omega t)$ 作用下，建立隔振器的运动学方程为

$$M(\ddot{x} - \ddot{y}) + c(\dot{x} - \dot{y}) + \gamma_2 K_v l_0 (x - y)^3 = - M\ddot{y} \tag{13}$$

令 $u = x - y$，$\dot{u} = \dot{x} - \dot{y}$，$\ddot{u} = \dot{x} - \ddot{y}$，则隔振器的无量纲运动微分方程为

$$\ddot{\hat{u}} + 2\xi\dot{\hat{u}} + \gamma_2 \hat{u}^3 = \hat{f}\sin(\Omega\tau) \tag{14}$$

其中，$\tau = \omega_n t$，$\xi = C/2M\omega_n$，$\Omega = \omega/\omega_n$，$\omega_n = \sqrt{K_v/M}$，$\hat{f} = \hat{Z}\Omega^2$。

基于谐波平衡法[18]可得，隔振器的幅频特性方程为

$$\left(\frac{3}{4}\gamma A^3 - A\Omega^2\right)^2 + (2\xi A\Omega)^2 = (\hat{Z}\Omega^2)^2 \tag{15}$$

因此，位移传递率表达式为

$$T_Z = \frac{|x|}{|y|} = \frac{|u + y|}{|y|} = \frac{\sqrt{A^2 + \hat{Z}^2 + 2A\hat{Z}\cos\varphi}}{\hat{Z}} \tag{16}$$

其中，$\cos\varphi = \left(\frac{3}{4}\gamma A^3 - A\Omega^2\right)/\hat{Z}\Omega^2$。

4　动力学仿真

为评估 QZS 隔振器的隔振性能，在不同激励频率下，对 QZS 隔振器与相应的线性隔振器进行动力学仿真。

结合式(13)，使用四阶龙格库塔法对 QZS 隔振器进行数值仿真，仿真参数如表 1 所示。当输入信号为正弦波时，激励幅值为 3 mm，激励频率为 3 Hz，可得到隔振器激励和响应的对比曲线，如图 10 所示。隔振器的位移响应曲线在短时间内达到稳定状态，且隔振器的位移响应幅值明显小于输入的激励幅值，说明在该激励频率下 QZS 隔振器具有较好的隔振性能。

表 1　隔振器仿真参数

Tab. 1　Vibration isolator simulation parameters

参数	数值
M	1.6 kg
m	2
n	1.6
K_s	0.71 N/mm
K_v	0.3 N/mm
ξ	0.1

结合线性动力学微分方程[19]，进一步，通过分别提取在不同激励频率下线性隔振器和 QZS 隔振器稳定后的响应幅值，可得两者的位移传递率，如图 11 所示。通过 QZS 隔振器仿真结果与线性隔振器仿真结果的对比可知，在频率为 5 Hz 以下时，QZS 隔振器的位移传递率曲线明显比线性隔振器的位移传递率曲线低；当激励频率逐渐增大时，两者的位移传递率曲线逐渐接近，在频率为 8 Hz 以上时基本一致。

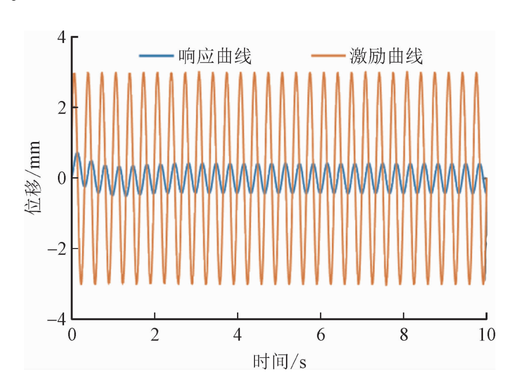


图 10　QZS 隔振器激励和响应对比曲线

Fig. 10　Excitation and response comparison curve of QZS vibration isolator

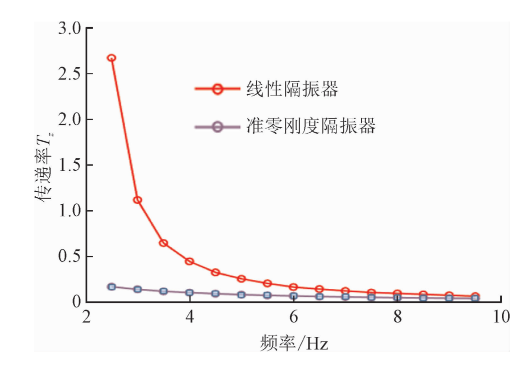


图 11　QZS 隔振器仿真曲线与线性隔振器仿真曲线

Fig. 11　QZS vibration isolator simulation curve and linear vibration isolator simulation curve

进一步考虑更为复杂的多频谐波激励，激励的频率都是低频的，且每种激励频率对应的幅值各不相同。此时，基础受到的激励为

$$y = 1.6\sin(2\pi \times 0.56t) + 1.1\sin(2\pi \times 1.6t) + 1.4\cos(2\pi \times 0.9t) + \cos(2\pi \times 1.8t)$$

在多频谐波激励下，QZS 隔振器激励和响应对比曲线如图 12 所示。激励幅值最大接近 4.2 mm，输出幅值大大减小，约为 1.4 mm，即此 QZS 隔振器的位移传递率很低。结果表明，QZS 隔振器在多频谐波激励下也具备较好的隔振性能。

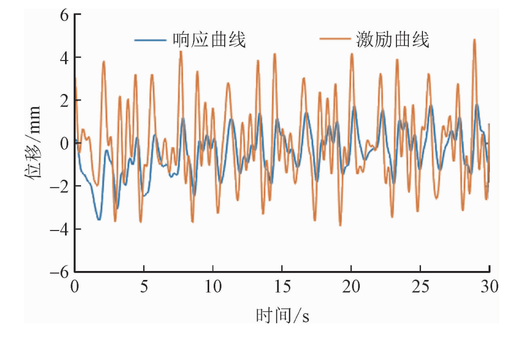


图 12　QZS 隔振器激励和响应对比曲线（多频谐波）

Fig. 12　Excitation and response comparison curve of QZS vibration isolator (multifrequency harmonics)

5　结　论

本研究设计了一种连杆-倾斜弹簧负刚度机构，并将其与线性弹簧并联构成一种新型 QZS 隔振器。根据静力学分析可知，通过对参数 m、n 和 α 的控制，可使其在静平衡位置处实现准零刚度特性。进一步建立了隔振器的动力学微分方程，并利用谐波平衡法推导了隔振器的位移传递率。最后，对 QZS 隔振器进行数值仿真，并与相应的线性隔振器对比分析。结果表明，QZS 隔振器的隔振性能明显优于线性隔振器，且在多频谐波激励下隔振效果良好。

此外，该 QZS 隔振器具有更灵活的操作方式，更适合安装在空间较小的机械结构中，因其结构简单，易于生产制造，有利于工程应用。同时，该隔振器为精密工程领域低频减振设备的开发和推广提供了参考。

参考文献：

[1] 张建卓，李旦，董申，等. 精密仪器用超低频非线性并联隔振系统研究[J]. 中国机械工程，2004，15(1)：69-71.
ZHANG Jianzhuo, LI Dan, DONG Shen, et al. Study on ultra-low frequency parallel connection isolator used for precision instruments [J]. China mechanical engineering, 2004, 15(1): 69-71 (in Chinese).

[2] 陆泽琦，陈立群. 非线性被动隔振的若干进展[J]. 力学学报，2017，49(3)：550-564.
LU Zeqi, CHEN Liqun. Some recent progresses in nonlinear passive isolations of vibrations [J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2017, 49(3): 550-564 (in Chinese).

[3] RAO S S. 机械振动[M]. 李欣业，杨理诚，译. 北京：清华大学出版社，2016.

[4] CARRELLA A, BRENNAN M J, WATERS T P. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic [J]. Journal of sound and vibration, 2007, 301(3/4/5): 678-689.

[5] LE T D, AHN K K. A vibration isolation system in low frequency excitation region using negative stiffness structure for vehicle seat[J]. Journal of sound and vibration, 2011, 330(26): 6311-6335.

[6] 路纯红,白鸿柏. 新型超低频非线性被动隔振系统的设计[J]. 振动与冲击, 2011, 30(1): 234-236.
LU Chunhong, BAI Hongbo. A new type nonlinear ultra-low frequency passive vibration isolation system[J]. Journal of vibration and shock, 2011, 30(1): 234-236(in Chinese).

[7] 彭献,张施详. 一种准零刚度隔振系统的静力与线性动力特性分析[J]. 力学季刊, 2012, 33(3): 492-498.
PENG Xian, ZHANG Shixiang. Static and linear dynamic characteristics analysis for a kind of vibration isolation system with quasi-zero-stiffness[J]. Chinese quarterly of mechanics, 2012, 33(3): 492-498(in Chinese).

[8] 刘兴天,张志谊,华宏星. 新型低频隔振器的特性研究[J]. 振动与冲击, 2012, 31(5): 161-164.
LIU Xingtian, ZHANG Zhiyi, HUA Hongxing. Characteristics of a novel low-frequency isolator[J]. Journal of vibration and shock, 2012, 31(5): 161-164(in Chinese).

[9] 刘兴天,孙靖雅,肖锋,等. 准零刚度微振动隔振器的原理和性能研究[J]. 振动与冲击, 2013, 32(21): 69-73.
LIU Xingtian, SUN Jingya, XIAO Feng, et al. Principle and performance of a quasi-zero stiffness isolator for micro-vibration isolation[J]. Journal of vibration and shock, 2013, 32(21): 69-73(in Chinese).

[10] 孟令帅,孙景工,牛福,等. 新型准零刚度隔振系统的设计与研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(11): 195-199.
MENG Lingshuai, SUN Jinggong, NIU Fu, et al. Design and analysis of a novel quasi-zero stiffness vibration isolation system[J]. Journal of vibration and shock, 2014, 33(11): 195-199(in Chinese).

[11] 周加喜,王心龙,徐道临,等. 含凸轮-滚轮机构的准零刚度系统隔振特性实验研究[J]. 振动工程学报, 2015, 28(3): 449-455.
ZHOU Jiaxi, WANG Xinlong, XU Daolin, et al. Experimental study on vibration isolation characteristics of the quasi-zero stiffness isolator with cam-roller mechanism[J]. Journal of vibration engineering, 2015, 28(3): 449-455(in Chinese).

[12] ZHOU J X, WANG X L, XU D L, et al. Nonlinear dynamic characteristics of a quasi-zero stiffness vibration isolator with cam-roller-spring mechanisms[J]. Journal of sound and vibration, 2015, 346: 53-69.

[13] 杨庆超,柴凯,楼京俊,等. 柔性基础准零刚度隔振系统动力学特性分析[J]. 应用力学学报, 2018, 35(1): 70-74.
YANG Qingchao, CHAI Kai, LOU Jingjun, et al. Dynamic characteristic analysis of quasi-zero stiffness vibration isolation system with flexible foundation[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2018, 35(1): 70-74(in Chinese).

[14] 杨雪锋,孟庆国,李威,等. 康复机器人准零刚度隔振特性分析与实验[J]. 振动、测试与诊断, 2019, 39(2): 298-305.
YANG Xuefeng, MENG Qingguo, LI Wei, et al. Analysis and experimental study on quasi-zero-stiffness vibration isolation characteristics of rehabilitation robot[J]. Journal of vibration, measurement & diagnosis, 2019, 39(2): 298-305(in Chinese).

[15] MENG Q G, YANG X F, LI W, et al. Research and analysis of quasi-zero-stiffness isolator with geometric nonlinear damping[J]. Shock and vibration, 2017, 2017: 6719054.

[16] 宋春芳,徐龙龙,刘彦琦. 含水平非线性弹簧的准零刚度隔振系统的力传递率研究[J]. 应用力学学报, 2019, 36(2): 356-363.
SONG Chunfang, XU Longlong, LIU Yanqi. The force transmissibility of a quasi-zero stiffness isolation system with horizontal nonlinear springs[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2019, 36(2): 356-363(in Chinese).

[17] 袁屹杰,纪明,张卫国,等. 一种准零刚度系统隔振性能的几何参数优化分析[J]. 应用力学学报, 2021, 38(1): 225-233.
YUAN Yijie, JI Ming, ZHANG Weiguo, et al. Analysis of geometric parameters for optimizing vibration isolation performance of a quasi-zero stiffness system[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2021, 38(1): 225-233(in Chinese).

[18] 徐道临,张月英,周加喜,等. 一种准零刚度隔振器的特性分析与实验研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(11): 208-213.
XU Daolin, ZHANG Yueying, ZHOU Jiaxi, et al. Characteristic analysis and experimental investigation for a vibration isolator with quasi-zero stiffness[J]. Journal of vibration and shock, 2014, 33(11): 208-213(in Chinese).

[19] 张月英. 准零刚度隔振器的特性分析及实验研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2013.

（编辑　李坤璐）